Analysis für alle?
Begründungen, Ziele und Schwerpunkte im Pflichtbereich
Referent: L. Führer, Hameln

Der landläufige Analysisunterricht, wie ihn oft Referendare, von etablierten Fachlehrern und Schulbüchern gestützt, darbieten, vermittelt ein trauriges, weil in erstarrte Bruchstückchen atomisiertes Bild. Ein durchgängig tragfähiges geistiges Band ist nur selten vorhanden und noch seltener für Schüler erkennbar; und der "irgendwie" tradierte Stoffkanon mit seinen Höhepunkten bei kontextfreien Kurvendiskussionen und Parameterscharen oder bei mehr oder minder verzwickten Extremwertaufgaben oder bei raffinierten Stammfunktionsjagden...stellt nun einmal den Kalkül weit über das Begreifen. Jeder weiß, daß gedankliche Durchdringung nur schwer zu unterrichten ist, weil Schüler der Oberstufe nur noch selten wißbegierig sind und weil Abituranforderungen sehr enge geistige Grenzen abstecken. Es scheint trotzdem, als hätte man über all den Verwaltungsreformen der letzten Jahre wesentliche Errungenschaften früherer Zeiten vergessen und hoffnungsvolle Neuansätze vernachlässigt. Ich kann nicht glauben, daß die heute verbreiteten Grundkursbücher das in breiter Front Mögliche repräsentieren, denn ich kann nicht sehen, wie sich eine solche Stoffansammlung im Pflichtbereich auf Dauer rechtfertigen will.

Zwei Gesichtspunkte möchte ich einer systematischeren Behandlung des Themas voranstellen, weil sie die Sinnfälligkeit des Analysisunterrichts deutlich heben könnten:

- Im Zuge der Meraner Reformvorschläge von 1905 etablierte sich dieser Unterricht auf unseren Oberstufen. Die damalige Hauptforderung, den Unterricht vom "funktionalen Denken" (nicht von irgendwelchen Funktions"begriffen") wie von einem "Ferment" durchdringen zu lassen, ist durch die Strukturwelle von 1957 bis etwa 1975 lebensgefährlich unterspült worden. Ohne den angstfreien Umgang mit mehreren Variablen zugleich und mit deren changierenden Abhängigkeiten gerinnt Analysisunterricht zur Mittelstufenalgebra.
  Beispiel: Statt f' global und wenigstens grob qualitativ anzuschauen, werden Wortschablonen wie "notwendig" und "hinreichend" verabfolgt und punktale Schemata eingeübt. Das geht bis hin zur Behauptung von Mathematiklehrern, aus $f'(x_o)=0$ könne man auf einen Extremwert oder Wendepunkt schließen, bei Nichtexistenz der zweiten Ableitung in x_o könne es keinen Wendepunkt geben, weil der über f" definiert wäre usw...

Aus: Bericht ü. d. 8. Tagung der Fachleiter f. Math., Schriften des MNU 30 (1982), S. 24-31.

- Die Vorbereitung einer allgemeinen Studierfähigkeit erzwingt ein gewisses Rechentraining. Nun gehen inzwischen 20-30% eines Altersjahrgangs auf das Gymnasium, und nur die Hälfte von ihnen will studieren. Mit-Entscheidungskompetenz und Bürgersinn können aber bei Jugendlichen, die später nicht studieren oder die irgendwann auf mathematikfernen Wegen politischen Einfluß gewinnen werden, nicht ohne ein bescheidenes Maß an Kenntnissen und vor allem Einblicken in die mächtigsten Standardmethoden vorbereitet werden. In Grundkursen und in 11. Klassen muß daher - mehr noch als in den wissenschaftspropädeutisch orientierten Leistungskursen - Überblicksinformation vor dem Kalkülmäßigen rangieren. Will man den Analysisunterricht auf Dauer rechtfertigen, so muß die Trivialisierungstendenz unserer prominentesten Lehrbücher rasch zurückgedrängt werden. Aber auch im Leistungskurs und in entsprechenden Differenzierungsphasen der 11. Klasse sollte mehr als heute üblich auf Strategien- und Methodenkenntnis und vor allem auf Erkenntnis abgehoben werden, weniger auf Virtuosität im Rechnen von Aufgaben, an denen examinierte Referendare und Mathematiker scheitern. (vgl. Bauer)
  Beispiel: Oft wird Anfängern in der Analyses erzählt, die Differentialrechnung ziele darauf ab, die genaue Lage von Extremstellen zu berechnen. Es ist nun aber ein tiefes, zuerst von Kepler beiläufig bemerktes, dann von Fermat als entscheidend erkanntes Charakteristikum differenzierbarer Funktionen, daß ihre Extremstellen nur ungenau berechnet werden müssen, weil die Funktion sich dort fast wie lokal konstante ausnehmen.

Anderes Beispiel: Viele Lehrer verstehen den Witz des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung nicht mehr, wenn er im Schulalltag auf der Basis schmalsten Funktionenmaterials "drankommt". Da macht man nach der (oft nur ganzrationalen) Differentialrechnung ein bißchen Riemann-Integral mit den üblichen Verkürzungen und zwei oder drei Beispielen vom Typ x^n, um dann rasch die Integralfunktion (mit variabler Obergrenze) hereinzuführen und (im getarnten Lehrervortrag) als Stammfunktion des Integranden zu entlarven - was die Schüler längst vermuteten. Vielleicht wird noch die (auf dieser Basis an Funktionenmaterial) völlig nebensächliche Integralfunktion gründlich studiert, um die triviale additive Konstante zu thematisieren. Die ganzrational-eingestimmten Schüler lernen jedenfalls, daß es viel geistreicher, weil erschöpfender ist, sofort <u>alle</u> Stammfunktionen mit Hilfe einer geratenen anzuschreiben, und daß Integralrechnung eine zu Abiturzwecken getarnte Differentialrechnung ist.

Daß es auf die Integralfunktion erst ankommt, wenn die <u>Existenz</u> einer Stammfunktion nicht mehr aus früheren Berechnungen zu entnehmen ist, daß es also um die <u>Neuschöpfung und Berechnung</u> von nicht-trivialen Funktionen wie

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} \quad , \quad \int_0^x \frac{dt}{t+1} \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

geht, das geht im Schmalspurunterricht allgemein unter - nicht nur im Grundkurs übrigens, und nicht nur in der didaktischen Praxis. Daß das "t" hier plötzlich als Variable bevorzugt wird und daß die Leibnizsche Produktschreibweise für den Integranden nicht nur formal paßt, sondern auch infinitesimal anschaulich ist, also im besten Sinne "Funktionales" symbolisiert, und daß von hier aus über den Hauptsatz zu den Ansatztechniken von Differentialgleichungen ein Lebensnerv der Analysis verläuft - das alles ist, trotz Kirschs Hinweis, nicht allgemeines Lehrgut. (Der Steuerzahler braucht nicht zu glauben, daß das zu schwer sei!)

Auch wenn die folgenden Ausführungen die genannten Punkte nicht so deutlich hervortreten lassen oder wenn meine Detailvorschläge nur bessere provozieren sollten, möchte ich auf diese beiden Anliegen nicht verzichten:
Der Analysisunterricht sollte vor allem im Pflichtbereich wieder als Krönung des funktionalen Denkens ausgestattet werden.
Und
Der Analysisunterricht sollte sich stets der allgemeinbildenden Funktion bewußt bleiben und den Sinnzusammenhang über den Kalkül stellen.

****

<u>Stichworte zur Begründung des Analysisunterrichts:</u>

1. Die Mathematik ist in der heutigen Welt "da". Man kann sie nur auf Kosten selbstverschuldeter Unmündigkeit "abwählen".
2. Analysis ist schwer, und das ist einer ihrer Bildungsbeiträge.
3. Gegen Mathematik hilft nur Mathematik.
4. Analysis hat mit All- und Existenzaussagen zu tun, also mit sorgfältigen Generalisierungen.
5. Spracherziehung ist auch heute noch wichtiger als Verbalbildung.
6. Die bewußte Reflexion begrifflicher Grenzen beugt auf natürliche Weise mechanistischem Wunderglauben vor. (vgl. Zenon!)
7. Von der Dynamik guter Begriffsgestalten ahnen Lernzielfreunde nichts.
8. Analysis ist Darstellungsform exakterer Wissenschaften; sie sollte auch als eines der Organe analytischer Arbeit dargestellt und gelehrt werden.
9. Analysis ist Grundvoraussetzung für viele Berufe und Studienzweige.

****

<u>Vorschlag für einen Lehrgang in Klasse 11 (dreistündig):</u>

a) Studium von $f_t(x) = tx + 2\sqrt{t^2+1}$ auf der Linie von "Anschauliche Analysis I" (Ehrenwirth, S.35, Nr.58). Unter diesem Leitproblem werden Geradengleichungen wiederholt, Geradenscharen betont, die Punkt-Steigungs-Form eingeführt, Vokabeln und Details aufgefrischt (Nullstelle, Prüfung auf Inzidenz, Steigungsberechnung, Pythagoras usf.) und in die Arbeit mit mehreren Variablen eingeführt, was sich als besonders dringlich erweisen dürfte. (Erfahrungsgemäß dauert diese Phase mit allen Abstechern und Zusatzaufgaben vier bis sechs Wochen. Der Grund liegt im unzureichenden Mittelstufenunterricht.)

b) Wiederholung bzw. (nicht so selten:) Neueinführung in die quadr. Ergänzung, Scheitelpunktbestimmung und Parabelzeichnung. Der Lehrer informiert zusammenfassend darüber, daß Geraden das Werkzeug, Parabeln den Prototyp der Analysis repräsentieren.

c) Die Interpolationsparabel zu drei gegebenen Punkten wird nach Newton berechnet, nicht durch ein lineares Gleichungssystem. Abgesehen vom geringeren Rechenaufwand, spielt hier die Punkt-Steigungs-Form eine willkommene Rolle, es treten Parabelscharen im sinnvollen Kontext auf (Variable Superposition!), es wird das Abspalten von Linearfaktoren vorbereitet, und es entsteht ein erster Eindruck davon, wie empirische Kurven entstehen können.

d) Ohne Grenzwertsorgen wird die Parabeltangente aus der Punkt-Steigungsschar (durch verschwindende Diskriminate) herausgefischt.

e) Einige Anwendungsbeispiele zeigen, daß Tangenten nützlich sind: Parabelbrennpunkt, Parabel als Äquidistanzkurve, historische Anwendungen (auch Irrwege), Geschichte der Parabel, Geschwindigkeitsbegriff.

e') Nebenbei wird die Tangentenbestimmung über konjugierte Durchmesser vorgeführt: Sie zeigt später einen Weg bei schwierigeren Tangentenproblemen auf.

f) Eine naheliegende Verallgemeinerung von Punkt c führt auf ganzrationale Funktionen höheren Grades. (Anwendungsbeispiel: π-Berechnung durch Richardson-Extrapolation; vgl. H.Engels in Ddm 1/77) Division von einfachen Polynomen (evtl. Horner-Schema für die Ergebniskoeffizienten), Abspalten von Linearfaktoren, geometrische Reihe, qualitative Kurvendiskussion nebst Grobskizzen.

f') Nebenbei kann die geometrische Reihe eingesetzt werden, um im Lehrervortrag über Archimedes' Parabelquadratur zu berichten und auf die Integralrechnung hinzuweisen. (Dort kann dann über die Simpson-Regel ganz pragmatisch eingestiegen werden, bevor der übliche Begriffsapparat frustriert!)

g) An einer Funktion höheren Grades wird gezeigt, daß die Tangentenbestimmung auf dem gewohnten Weg nicht (ohne weiteres) klappt. Punkt e' weist den Weg: man beobachte den zweiten Schnittpunkt bei der Punkt-Steigungs-Schar! Algebraisch führt dies auf das $\frac{0}{0}$ - Problem, das keinesfalls (wie bei Blum) beiseite geschoben werden darf.

g') Das $\frac{0}{0}$-Problem wird auf historischer Grundlage sorgfältig erörtert. (Differenzierung: Im Unterricht zeigte sich, daß hier nicht einfach nach Leistungsfähigkeit, sondern nach "Fantasiereichtum" differenziert wird!)
Fazit: $f'(x_o)$ ist hier nur als <u>sinnreiche</u> Verabredung herleitbar.

h) Nach zahlreichen Ableitungsergebnissen (Liste mit Differentialquotienten und Ableitungen) werden Rekonstruktionsübungen (Stammfunktionen!) und (im arbeitsteiligen Gruppenunterricht) Newton-Verfahren, Kurvendiskussion und Extremwertaufgaben behandelt.

i) Die üblichen Rechenregeln werden jetzt, soweit nicht schon zwanglos benutzt (Linearität z.B.), plausibel gemacht bzw. "bewiesen", was die notwendigen Zwischenrechnungen offensichtlich abkürzt. Sowohl diese Beweisversuche als auch ein Ansatz zum Trennungssatz ("lokaler" Monotoniesatz) legen nahe, sich um den Fehler bei der tangentialen Approximation genauer zu kümmern.

j) Einige Abstände zwischen Tangentenfunktion und Ausgangsfunktion werden berechnet. Die Floskel "nahe x_o" wird jetzt mit Hilfe "x und x_o stimmen im wesentlichen bis zur k.Nachkommastelle überein" präzisiert.

k) Die ebene Aufwicklung $\binom{\cos t}{\sin t}$ wird auf zunächst plausible Weise "differenziert". Anschließend wird nachgewiesen, daß sich der tangentiale Fehler anständig verhält. Jetzt wird allgemein festgelegt, was "differenzierbar", "Ableitung" bzw. "Tangente" bedeuten sollen.

l) Die Ableitung von b^x wird gemäß der DMV-Denkschrift plausibel gemacht.

Nach diesem Programm, das erfahrungsgemäß in einem einjährig-dreistündigen Unterricht bewältigbar ist, stehen Fortsetzungen im Sinne einer vertieften Grenzwerttheorie oder im Sinne verschärfter Anwendungen (Mittelwertsatz, Taylorreihe, Differentialgleichungen) oder im Sinne einer Einführung in die Integralrechnung über die Simpson-Regel offen.

****

Methodische Hintergedanken (Stichworte):

10. Anwendungen gehören zur Analysis, sie garantieren aber keine ausreichende Motivationsbasis. Dauerhafte Motivation beruht allein auf (raschem) Können in der Sache!
11. Analysis sollte zum Grenzwertbegriff hin, nicht von ihm her gelernt werden.
12. Ein wiederholender Vorspann frustriert und desavouiert, man sollte also rasch zur Differentialrechnung kommen.
13. Vokabelübungen und logisches Trockentraining sind ungerechtfertigt. Das Regelwerk sollte nebenbei auftauchen - in sinnvollem Kontext. Anwendungsbeispiele sollten möglichst schon in die Begriffsentwicklung integriert werden.
14. Der Variablenbegriff wird in der Mittelstufe zunehmend vernachlässigt (Stochastik, Taschenrechner, Algorithmik). Er ist schnell aufzuarbeiten.
15. Beweise sollten dann gebracht werden, wenn sie der inhaltlichen Vertiefung, der sachlichen Abgrenzung und/oder dem Sprachtraining dienen können. Sie sind kein ritueller Selbstzweck, also zu rechtfertigen.
16. Die Kurvendiskussion sollte im Sinne von E. Hunger (Mathematik und Bildung; Braunschweig 1949, S.63 ff.) als wissenschaftliches Miniprojekt aufgefaßt werden, nicht als Buchhalterproblem.
17. Das funktionale Denken im Sinne abhängiger und unabhängiger Variabler bzw. globaler Variationen ist zu schulen.
18. Numerische Fragen sind in angemessenem Rahmen (und der ist bei den schulisch erreichbaren Problemstellungen recht eng) zu berücksichtigen. Computerorientierung darf keinesfalls in Konsumentenhaltung ausarten oder den Blick auf die erkenntnismäßigen Komponenten der Analysis verstellen.

19. Im Sinne der Sprachschulung sind Argumentationen, Konventionen und Vermutungen schrittweise deutlicher zu entflechten. Das logische Anspruchsniveau soll schrittweise gesteigert werden. Selbstkommentare zum Unterricht und auch der allmählich hervortretende Gedanke, vom Lokalen zum Globalen schließen zu wollen, spielen eine strukturierende Hauptrolle. ("Genetischer Zugang")
20. Grenzerfahrungen sollen immer wieder als Motor der Theorieentwicklung erscheinen. ("Genetischer Zugang")
21. Die algebraisch-geometrischen Aspekte der (Schul-) Analysis können an der Parabel verdeutlicht werden, die infinitesimalen an den Dezimalzahlen.

****

9. Fachleitertagung, Fuldatal, 1982

Diskussion zum Vortrag: Analysis für alle?
Diskussionsleiter: Barth
Protokoll: Giesemann, Spangenberg

RÖSSLER:
Warum Exhaustionsverfahren nach Archimedes als Lehrervortrag und nicht mit den Schülern erarbeiten?

FÜHRER:
Ehrfurcht vor der Leistung Archimedes', der ohne Hilfsmittel der Algebra das Verfahren entwickelte.

RÖSSLER:
Gibt als Beispiel für die Notwendigkeit der exakten Berechnung von Extrema eine ganzrationale Funktion 3. Grades an, bei der Krümmungsmaximum und Extremwert nicht zusammenfallen, aber sehr eng beieinander liegen.

KROLL:
1) Schnittpunktbestimmen zwischen Geraden und Parabel führt von dem angestrebten Tangentenbegriff der Analysis weg.
2) Was soll heißen "Variablenbegriff in der Analysis aufarbeiten"? Hinweis auf lineare Algebra, in der mehr Variable vorkommen.
3) Was heißt "infinite Verallgemeinerung von Kausalbeziehungen"?

FÜHRER:
Unterschiedliche Qualität des Variablenbegriffs in Analysis und linearer Algebra. Bedeutung für die Darstellung funktionaler Zusammenhänge. Weg vom punktuellen Gerüst zu beweglichen Gefügen. Variablenbegriff ist notwendig zum Verständnis der Quantoren und zur Präzisierung entsprechender Aussagen.

BLUM:
1) "Signale aus Kassel" waren seinerzeit für die Mathematik von morgen gedacht. Entscheidend war der Ansatz, die Inhalte dem Lernenden leichter zugänglich zu machen (methodische Stufungen).
2) Warum Zugang zur Ableitung trigonometrischer Funktionen als Lehrervortrag, obwohl es Vorschläge für stärker schülerorientierte Zugänge gibt (Kirsch)?

FÜHRER:
Zu 1) Verdienst von "Kassel" war, von der Strenge weggeläutet zu haben. In der Praxis ist dadurch die Analysis auf unzulässige Weise trivialisiert (zu wenig Kenntnisse - Reduzierung auf Minikalkül).
Zu 2) Mit möglichst wenig Mittelstufenkenntnissen - insbesondere ohne Additionstheoreme - soll quadratische Abschätzung angestrebt werden.

SCHOLZ:
Das Vorgetragene ist schwer übertragbar. Zeitliche Länge ist problematisch für viele Bundesländer.

FÜHRER:
Viele Bundesländer haben inzwischen 11. Klasse, sonst Vorsemester und 1. Semester als zeitlichen Rahmen. Vorgetragener Kurs soll kein starres Konzept sein, übertragbar ist aber die Betonung der begrifflichen Komponente der Analysis.